




RS Global
Journals

Scholarly Publisher
RS Global Sp. z O.O.
ISNI: 0000 0004 8495 2390

Dolna 17, Warsaw, Poland 00-773
Tel: +48 226 0 227 03
Email: editorial_office@rsglobal.pl

JOURNAL	Science Review
p-ISSN	2544-9346
e-ISSN	2544-9443
PUBLISHER	RS Global Sp. z O.O., Poland
ARTICLE TITLE	АНАЛИТИЧЕСКИЕ И ЧИСЛЕННЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ КРУГЛЫХ ПЛАСТИН НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ С ПЕРЕМЕННЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ ПОСТЕЛИ
AUTHOR(S)	Крутий Ю. С., Сурьянинов Н. Г., Сорока Н. Н., Карнаухова А. С.
ARTICLE INFO	Krutii Yurii, Surianinov Mykola, Soroka Mykola, Karnauhova Ganna. (2020) Analytical and Numerical Studies of the Stress-Strain State of Round Plates on an Elastic Base with a Variable Bed Coefficient. Science Review. 6(33). doi: 10.31435/rsglobal_sr/30092020/7191
DOI	https://doi.org/10.31435/rsglobal_sr/30092020/7191
RECEIVED	30 July 2020
ACCEPTED	16 September 2020
PUBLISHED	20 September 2020
LICENSE	 This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License .

© The author(s) 2020. This publication is an open access article.

АНАЛИТИЧЕСКИЕ И ЧИСЛЕННЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ НАПРЯЖЕННО- ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ КРУГЛЫХ ПЛАСТИН НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ С ПЕРЕМЕННЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ ПОСТЕЛИ

Крутий Ю. С., д.т.н., проф., Одесская государственная академия строительства и архитектуры, г. Одесса, Украина, ORCID ID: <https://orcid.org/0000-0001-7105-3087>
Сурьянинов Н. Г., д.т.н., проф., Одесская государственная академия строительства и архитектуры, г. Одесса, Украина, ORCID ID: <https://orcid.org/0000-0003-2592-5221>
Сорока Н. Н., к.т.н., доц., Одесская государственная академия строительства и архитектуры, г. Одесса, Украина, ORCID ID: <https://orcid.org/0000-0002-9551-9475>
Карнаухова А. С., асс., Одесская государственная академия строительства и архитектуры, г. Одесса, Украина, ORCID ID: <https://orcid.org/0000-0002-3542-4300>

DOI: https://doi.org/10.31435/rsglobal_sr/30092020/7191

ARTICLE INFO

Received 30 July 2020
Accepted 16 September 2020
Published 20 September 2020

KEYWORDS

round plate, annular plate, variable elastic foundation, Winkler's hypothesis, variable bed coefficient, axisymmetric bending, analytical solution, finite element method.

ABSTRACT

The results of the study of the stress-strain state of a circular plate of constant cylindrical stiffness lying on an elastic foundation with a variable coefficient of elastic resistance are presented. Eight calculation options are considered – four each for a concrete round slab and for a steel round plate – under two conditions of fastening (hinged and rigid along the entire contour) and two laws of variation of the bed coefficient (according to the linear law and according to the law of the concave parabola). To solve the problem, the authors applied a general analytical method for solving differential equations with variable coefficients. The finite element method is used to verify the results. Comparison shows that the results coincide very well in deflections, differing in the third or fourth decimal places, and somewhat worse – in moments.

Citation: Krutii Yurii, Surianinov Mykola, Soroka Mykola, Karnauhova Ganna. (2020) Analytical and Numerical Studies of the Stress-Strain State of Round Plates on an Elastic Base with a Variable Bed Coefficient. *Science Review*. 6(33). doi: 10.31435/rsglobal_sr/30092020/7191

Copyright: © 2020 Krutii Yurii, Surianinov Mykola, Soroka Mykola, Karnauhova Ganna. This is an open-access article distributed under the terms of the **Creative Commons Attribution License (CC BY)**. The use, distribution or reproduction in other forums is permitted, provided the original author(s) or licensor are credited and that the original publication in this journal is cited, in accordance with accepted academic practice. No use, distribution or reproduction is permitted which does not comply with these terms.

Введение. Конструкции, опирающиеся на упругое основание, имеют широкое применение в строительстве. В разное время было предложено множество различных расчетных моделей грунтового основания. Каждая из них имеет свои недостатки и достоинства. Одной из наиболее часто применяющейся моделей упругого основания является модель Фусса-Винклера, появившаяся еще в XIX веке. Ее главным достоинством является простота, основанная на предположении прямой пропорциональности между передаваемым на основание давлением и прогибом, а недостатком – невозможность учета текстурных особенностей основания. Применяя модель Фусса-Винклера, можно получить более близкие к опытам величины контактных напряжений. Однако в этой модели не учитывается взаимное влияние фундаментов и зданий. При этом у модели существует ряд модификаций, которые в интегральной форме позволяют учитывать неоднородные свойства основания, как в плане, так и по глубине. При слабых и сильно сжимаемых грунтах и небольших опорных площадях фундаментов применение этой модели основания дает надежные результаты. Наиболее

распространенной модификацией модели Винклера является модель с переменным коэффициентом постели. В частности, эта модель нашла широкое применение при расчетах напряженно-деформированного состояния фундаментов конструкций, лежащих на лёссовых почвах, для которых характерно проседание.

Анализ последних исследований и публикаций. Теория расчета конструкций на упругом основании, благодаря трудам Г. Герца, Г.Д. Дутова, В.А. Киселева, Б.Г. Коренева, А.Н. Крылова, А.И. Лурье, Н.П. Пузыревского, И.А. Симвулиди, К. Хаяси и других исследователей, уже в середине прошлого века достигла значительного развития.

Представляется интересным обзор [1], авторы которого рассматривают состояние дел в этой области, выделяют ключевые области развития, включая моделирование почвенных сред и различные аналитические и численные подходы при анализе процесса взаимодействия между фундаментом и почвой.

Дальнейшее развитие модель упругого основания получила в трудах таких ученых, как М. И. Горбунов-Посадов, Б. Н. Жемочкин, Б. Г. Коренев, А. П. Сеницын, А. Г. Ишкова, Г. Я. Попов, Г. Э. Проктор и др. В 1949 г. В. З. Власовым предложена модель, в которой упругое и, в общем случае, неоднородное основание рассматривается как однослойная или многослойная модель, свойства которой описываются двумя или несколькими обобщенными упругими характеристиками. Модели Вигхарта и М. М. Филоненко-Бородича в математическом отношении эквивалентны модели В.З. Власова. Упругое основание, аналогичное однослойной модели, также было предложено П. Л. Пастернаком. Модель такого основания позволяет сводить решение задачи по расчету круглых плит на упругом основании к решению обыкновенных дифференциальных уравнений. Вопросы расчета конструкций, опирающихся на упругое винклеровское основание, излагаются в книге С. Н. Клепикова [2]. В ней приведены данные для расчета плит, лежащих на упругом основании с постоянным и переменным коэффициентом постели методом конечных разностей.

К решению исследуемой проблемы применялись различные математические подходы. Так, А. Г. Ишкова [3] использовала степенные ряды, В. М. Александров [4] – метод ортогональных многочленов. В работах [5 – 7] для решения задачи авторами применялись асимптотические методы, в [8, 9] – метод граничных элементов. S. F. Ng и M. Y. Chan [10] предложили существенное улучшение метода коллокаций с помощью метода наименьших квадратов.

Постановка проблемы. Такое разнообразие математических методов, используемых разными авторами для решения рассматриваемой здесь проблемы, связано с отсутствием до недавнего времени общего аналитического метода решения дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами. Такой метод для решения широкого круга задач механики, математическая модель которых описывается указанными уравнениями, предложил Ю.С. Крутий [11-14]. В данной работе используется приложение метода к расчету круглой пластины на упругом основании с переменным коэффициентом постели, а верификация результатов строится на их сравнении с результатами конечно-элементного анализа.

Результаты исследования. Рассмотрим общий случай – кольцевая пластина постоянной цилиндрической жесткости D , лежащая на переменном упругом основании и находящаяся под действием непрерывно распределенной поперечной нагрузки (рис. 1, а). Здесь a и b – радиусы внешней и внутренней контурных окружностей пластины, r – радиальная координата ($0 \leq r \leq a$). В частном случае, при $b = 0$, получим сплошную круглую пластину. Будем полагать, что реакция основания описывается моделью Винклера.

Осесимметричный изгиб пластины имеет место в случае, когда действующая нагрузка $q(r)$, реакция $R(r)$ упругого основания и условия закрепления пластины не зависят от полярного угла θ . При этом в пластине возникают три внутренних усилия – радиальный M_r и окружной M_θ изгибающие моменты, и радиальная поперечная сила Q_r (рис. 1, б). Крутящий момент $M_{r\theta}$ и окружная поперечная сила Q_θ равняются нулю в силу осевой симметрии напряженного состояния.

В соответствии с моделью Винклера, зависимость между реакцией $R(r)$ упругого основания и прогибом $w(r)$ имеет вид

$$R(r) = -k(r)w(r),$$

где $k(r)$ – непрерывный переменный коэффициент постели, который представим как

$$k(r) = k_0 A(r).$$

Здесь k_0 – значение коэффициента постели в некоторой характерной точке пластины; $A(r)$ – безразмерная непрерывная функция, выражающая закон изменения коэффициента постели от радиальной координаты.

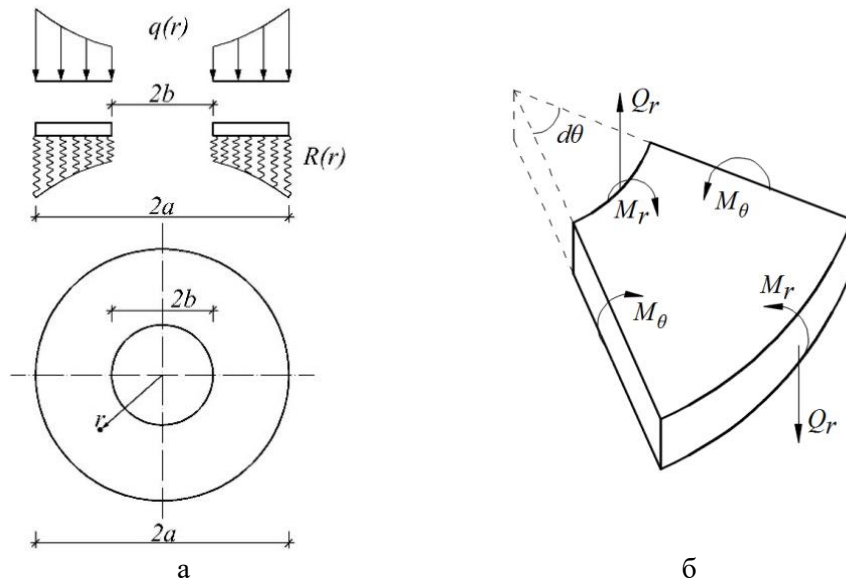


Рис. 1. Кольцевая пластина на переменном упругом основании

Аналогичным образом представим выражение для заданной нагрузки

$$q(r) = q_0 B(r),$$

где q_0 – нагрузка в некоторой точке пластины; $B(r)$ – безразмерная непрерывная функция, которой задана зависимость нагрузки от радиальной координаты.

Дифференциальное уравнение изгиба рассматриваемой пластины приобретает вид

$$D \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left\{ r \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dw}{dr} \right) \right] \right\} + k_0 A(r) w = q_0 B(r). \tag{1}$$

После определения прогиба $w(r)$, усилия в пластине определяются по известным формулам:

$$M_r = -D \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{\mu}{r} \frac{dw}{dr} \right), \tag{2}$$

$$M_\theta = -D \left(\mu \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right), \tag{3}$$

$$Q_r = -D \left(\frac{d^3 w}{dr^3} + \frac{1}{r} \frac{d^2 w}{dr^2} - \frac{1}{r^2} \frac{dw}{dr} \right), \tag{4}$$

где μ – коэффициент Пуассона.

Для построения точного решения дифференциального уравнения (1) будем применять метод прямого интегрирования, развитый в [11]. Опуская промежуточные математические преобразования, которые подробно изложены в работах [11-14], приведем окончательные результаты.

Определены четыре фундаментальных решения $X_n(r), Y_n(r) (n=1,2)$ однородного уравнения, соответствующего уравнению (1), и частное решение $X_*(r)$ неоднородного уравнения (1).

В результате общее решение исходного уравнения (1) можно записать так:

$$w(r) = C_1 X_1(r) + C_2 X_2(r) + C_3 Y_1(r) + C_4 Y_2(r) + \frac{q_0 a^4}{D} X_3(r), \quad (5)$$

где C_1, C_2, C_3, C_4 – произвольные константы, имеющие размерность прогиба. С целью выделить в правой части формулы (5) безразмерный множитель, положим $C_n = (q_0 a^4 / D) \lambda_n$ ($n = 1, 2, 3, 4$), где λ_n – произвольные безразмерные константы. После этого формулу для прогиба (5) можно записать в виде:

$$w(r) = \frac{q_0 a^4}{D} W(r); \quad (6)$$

$$W(r) = \lambda_1 X_1(r) + \lambda_2 X_2(r) + \lambda_3 Y_1(r) + \lambda_4 Y_2(r) + X_3(r), \quad (7)$$

где $W(r)$ – безразмерная функция.

В подобном формате представлены и формулы для первых трех производных от функции прогиба:

$$\frac{dw}{dr} = \frac{q_0 a^3}{D} \tilde{W}(r),$$

С учетом этого записаны и выражения для внутренних усилий:

$$M_r = -q_0 a^2 \left(\hat{W}(r) + \mu \frac{a}{r} \tilde{W}(r) \right), \quad (8)$$

$$M_\theta = -q_0 a^2 \left(\mu \hat{W}(r) + \frac{a}{r} \tilde{W}(r) \right), \quad (9)$$

$$Q_r = -q_0 a \left(\hat{W}(r) + \frac{a}{r} \tilde{W}(r) - \left(\frac{a}{r} \right)^2 \tilde{W}(r) \right). \quad (10)$$

Таким образом, получены формулы, необходимые для исследования на изгиб круглых и кольцевых пластин на упругом основании с переменным коэффициентом постели. Точное решение выражено через безразмерные фундаментальные функции, которые представляются рядами по степеням безразмерного параметра с переменными коэффициентами. Для определения переменных коэффициентов рядов получены рекуррентные интегральные соотношения. Как результат, формулы (6-10) для прогибов и внутренних усилий, записанные в аналитическом виде, полностью характеризуют напряженно-деформированное состояние пластин в случае, когда заданная нагрузка и коэффициент постели представляют собой произвольные непрерывные функции. Метод применим при любых заданных граничных условиях на контурах пластин. Фактически расчет сводится к определению из заданных граничных условий неизвестных констант интегрирования и численной реализации полученных решений.

Найденные формулы общего вида преобразованы для практически важного случая, когда коэффициент постели и нагрузка заданы многочленами. Показано, что в таком случае безразмерные фундаментальные функции представляются степенными рядами. Для вычисления коэффициентов степенных рядов выведены соответствующие рекуррентные соотношения.

В сравнении с приближенными методами, предложенный аналитический метод позволяет получить более точные значения параметров изгиба пластин.

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Бетонная плита с шарнирным опиранием по контуру.

В качестве первого примера рассмотрим круглую плиту толщиной $h = 0,12$ м и радиусом $a = 1,8$ м, которая находится под действием равномерно распределенной нагрузки $q = 15$ кПа. Материал – бетон ($E = 1,5 \cdot 10^7$ кПа; $\mu = 0$).

Результаты расчетов при линейном законе изменения коэффициента постели и при изменяющемся по закону вогнутой параболы, приведены в табл. 1.

Таблица 1. Прогобы и моменты в бетонной плите с шарнирным опиранием при линейном законе изменения коэффициента постели

Коорд, <i>m</i>	<i>w</i> , мм		M_r , кНм/м		M_θ , кНм/м	
	МКЭ	Авторский метод	МКЭ	Авторский метод	МКЭ	Авторский метод
0	-0,003947	-0,003948	-0,017122	-0,017442	-0,017271	-0,017442
0,085714	-0,003976	-0,003977	-0,016508	-0,016800	-0,017036	-0,017193
0,171429	-0,004063	-0,004064	-0,016825	-0,016336	-0,016854	-0,016834
0,257143	-0,004206	-0,004206	-0,018370	-0,017618	-0,017164	-0,016818
0,342857	-0,004410	-0,004410	-0,022670	-0,021499	-0,018200	-0,017445
0,428571	-0,004687	-0,004687	-0,029596	-0,028186	-0,020062	-0,018879
0,514286	-0,005062	-0,005061	-0,039260	-0,037196	-0,022710	-0,021156
0,6	-0,005564	-0,005562	-0,049884	-0,047215	-0,025949	-0,024162
0,685714	-0,006227	-0,006223	-0,056716	-0,055978	-0,029408	-0,027620
0,771429	-0,007079	-0,007073	-0,059111	-0,060247	-0,032537	-0,031067
0,857143	-0,008134	-0,008125	-0,055889	-0,056012	-0,034619	-0,033862
0,942857	-0,009376	-0,009365	-0,038044	-0,039020	-0,034830	-0,035215
1,028571	-0,010747	-0,010732	-0,006185	-0,005675	-0,033336	-0,034266
1,114286	-0,012131	-0,012114	0,046986	0,045732	-0,029437	-0,030205
1,2	-0,013354	-0,013335	0,115624	0,113622	-0,021745	-0,022441
1,285714	-0,014186	-0,014167	0,193399	0,191862	-0,009373	-0,010794
1,371429	-0,014365	-0,014347	0,270330	0,269011	0,004910	0,004328
1,457143	-0,013633	-0,013616	0,329984	0,328527	0,022580	0,021781
1,542857	-0,011792	-0,011779	0,350644	0,350253	0,041384	0,039650
1,628571	-0,008776	-0,008767	0,312739	0,313291	0,056894	0,055326
1,714286	-0,004716	-0,004711	0,199008	0,199952	0,066801	0,065737
1,8	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,068924	0,067719

Таблица 2. Прогобы и моменты в бетонной плите с шарнирным опиранием при изменении коэффициента постели по закону вогнутой параболы

Коорд, <i>m</i>	<i>w</i> , мм		M_r , кНм/м		M_θ , кНм/м	
	Авторский метод	МКЭ	Авторский метод	МКЭ	Авторский метод	МКЭ
0	-0,066191	-0,065932	0,500138	0,487252	0,500113	0,492283
0,085714	-0,065347	-0,065093	0,479703	0,461607	0,493333	0,480591
0,171429	-0,062881	-0,062644	0,421074	0,400505	0,473333	0,462318
0,257143	-0,058992	-0,058777	0,331808	0,323165	0,441767	0,431495
0,342857	-0,053980	-0,053781	0,223039	0,218684	0,400948	0,392868
0,428571	-0,048211	-0,048044	0,107612	0,101837	0,353811	0,347456
0,514286	-0,042075	-0,041933	-0,001948	-0,001851	0,303536	0,297306
0,6	-0,035940	-0,035821	-0,095246	-0,094635	0,252955	0,248202
0,685714	-0,030123	-0,030039	-0,165256	-0,167434	0,204852	0,199436
0,771429	-0,024860	-0,024797	-0,208842	-0,210967	0,161009	0,156674
0,857143	-0,020309	-0,020253	-0,226518	-0,224195	0,122990	0,118912
0,942857	-0,016505	-0,016478	-0,221616	-0,220347	0,091256	0,087531
1,028571	-0,013459	-0,013434	-0,199104	-0,197623	0,066005	0,062408
1,114286	-0,011085	-0,011066	-0,164355	-0,163146	0,046911	0,043072
1,2	-0,009269	-0,009256	-0,122147	-0,121112	0,033333	0,030851
1,285714	-0,007867	-0,007863	-0,076156	-0,075683	0,024444	0,023016
1,371429	-0,006724	-0,006725	-0,029105	-0,027438	0,019611	0,019535
1,457143	-0,005681	-0,005674	0,016275	0,016187	0,018131	0,018172
1,542857	-0,004583	-0,004581	0,055377	0,057602	0,019112	0,019383
1,628571	-0,003302	-0,003333	0,078968	0,078045	0,021712	0,022101
1,714286	-0,001761	-0,001764	0,069868	0,069321	0,024643	0,024939
1,8	1,031E-16	0,000000	-6,964E-14	0,000000	0,025444	0,025409

На рис. 2 показана зависимость прогиба от координаты для бетонной плиты, шарнирно закрепленной по контуру и опирающейся на основание, коэффициент постели которого изменяется по линейному закону, а на рис. 3 – для такой же плиты, но опирающейся на основание, коэффициент постели которого изменяется по закону вогнутой параболы.

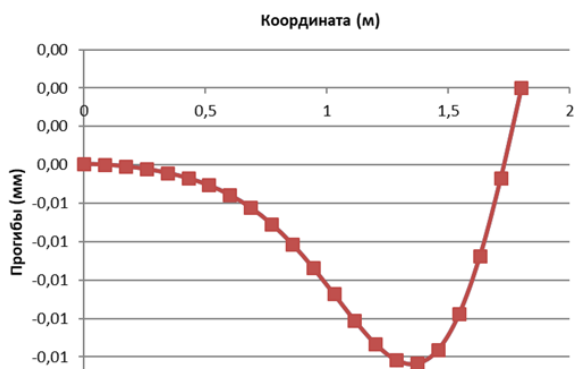


Рис. 2. Зависимость прогиба от координаты при линейном коэффициенте постели

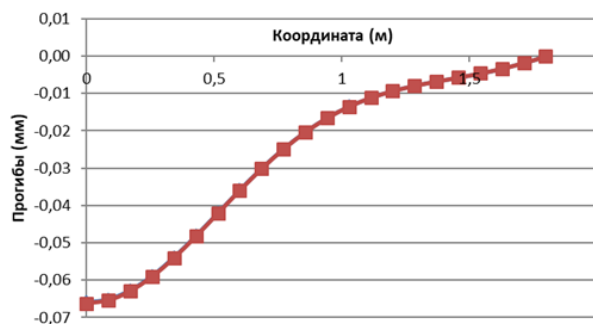


Рис. 3. Зависимость прогиба от координаты при коэффициенте постели, который изменяется по закону вогнутой параболы

Пример 2. Бетонная плита при тех же исходных данных, что и в предыдущем примере, но с жестким закреплением по контуру.

Результаты расчетов при линейном законе изменения коэффициента постели и при изменяющемся по закону вогнутой параболы, приведены в табл. 3, 4

Таблица 3. Прогибы и моменты в бетонной плите с жестким закреплением по контуру при линейном законе изменения коэффициента постели

Коорд, м	w, мм		M _r , кНм/м		M _θ , кНм/м	
	МКЭ	Авторский метод	МКЭ	Авторский метод	МКЭ	Авторский метод
0	-0,003925	-0,003925	-0,021528	-0,021740	-0,021650	-0,021740
0,085714	-0,003962	-0,003962	-0,021064	-0,021207	-0,021467	-0,021529
0,171429	-0,004071	-0,004071	-0,021460	-0,020935	-0,021353	-0,021257
0,257143	-0,004252	-0,004252	-0,022911	-0,022115	-0,021642	-0,021298
0,342857	-0,004509	-0,004508	-0,026095	-0,025026	-0,022429	-0,021832
0,428571	-0,004852	-0,004850	-0,030339	-0,029166	-0,023649	-0,022872
0,514286	-0,005295	-0,005291	-0,033671	-0,033307	-0,025088	-0,024278
0,6	-0,005850	-0,005845	-0,034902	-0,035550	-0,026395	-0,025764
0,685714	-0,006525	-0,006518	-0,032432	-0,033445	-0,027100	-0,026915
0,771429	-0,007311	-0,007304	-0,022646	-0,024286	-0,026657	-0,027210
0,857143	-0,008176	-0,008169	0,006444	-0,005628	-0,024504	-0,026072
0,942857	-0,009056	-0,009050	0,023340	0,023952	-0,020166	-0,022953
1,028571	-0,009849	-0,009847	0,065085	0,063911	-0,016374	-0,017443
1,114286	-0,010421	-0,010424	0,112376	0,110758	-0,008206	-0,009409
1,2	-0,010615	-0,010625	0,159028	0,157287	0,001783	0,000867
1,285714	-0,010275	-0,010293	0,194085	0,192311	0,014468	0,012564
1,371429	-0,009288	-0,009315	0,200797	0,201167	0,027123	0,024254
1,457143	-0,007630	-0,007666	0,165536	0,167190	0,035490	0,033912
1,542857	-0,005425	-0,005464	0,072570	0,074050	0,037943	0,039038
1,628571	-0,002995	-0,003031	-0,092942	-0,091420	0,034741	0,036865
1,714286	-0,000907	-0,000931	-0,338704	-0,336735	0,022317	0,024657
1,8	0,000000	0,000000	-0,664089	-0,662781	0,000000	0,000000

Таблица 4. Прогибы и моменты в бетонной плите с жестким закреплением по контуру при изменении коэффициента постели по закону вогнутой параболы

Коорд, <i>м</i>	<i>w</i> , мм		<i>M_r</i> , кНм/м		<i>M_θ</i> , кНм/м	
	Авторский метод	МКЭ	Авторский метод	МКЭ	Авторский метод	МКЭ
0	-0,003690	-0,003690	-0,003466	-0,003661	-0,003466	-0,003579
0,085714	-0,003696	-0,003696	-0,003798	-0,004276	-0,003576	-0,003778
0,171429	-0,003715	-0,003716	-0,004837	-0,005715	-0,003916	-0,004240
0,257143	-0,003751	-0,003752	-0,006688	-0,008026	-0,004507	-0,004973
0,342857	-0,003810	-0,003811	-0,009454	-0,011263	-0,005378	-0,005996
0,428571	-0,003901	-0,003902	-0,013132	-0,015303	-0,006547	-0,007310
0,514286	-0,004037	-0,004039	-0,017461	-0,019683	-0,008000	-0,008871
0,6	-0,004233	-0,004236	-0,021756	-0,023436	-0,009665	-0,010564
0,685714	-0,004502	-0,004506	-0,024758	-0,024991	-0,011386	-0,012179
0,771429	-0,004854	-0,004860	-0,024584	-0,022198	-0,012902	-0,013398
0,857143	-0,005289	-0,005295	-0,018854	-0,016606	-0,013841	-0,013805
0,942857	-0,005785	-0,005792	-0,005122	-0,005936	-0,013741	-0,012926
1,028571	-0,006296	-0,006302	0,018340	0,020312	-0,012115	-0,010316
1,114286	-0,006742	-0,006745	0,051403	0,053885	-0,008557	-0,006686
1,2	-0,007011	-0,007010	0,090740	0,093209	-0,002888	-0,002930
1,285714	-0,006972	-0,006965	0,128632	0,132109	0,004655	0,006007
1,371429	-0,006499	-0,006485	0,152397	0,151674	0,013260	0,016386
1,457143	-0,005517	-0,005496	0,145013	0,142643	0,021427	0,024224
1,542857	-0,004056	-0,004030	0,087301	0,084360	0,026967	0,027074
1,628571	-0,002317	-0,002291	-0,038417	-0,042215	0,027165	0,027121
1,714286	-0,000731	-0,000713	-0,244112	-0,249818	0,019090	0,019540
1,8	0,000000	0,000000	-0,533254	-0,538061	0,000000	0,000000

Пример 3. Стальная пластина с шарнирным опиранием по контуру. В качестве третьего примера рассмотрим круглую пластину толщиной $h = 0,03 м$ и радиусом $a = 0,8 м$, которая находится под действием нагрузки, изменяющейся вдоль радиуса по линейному закону $q = q_0(1 - \frac{r}{a})$, где $q_0 = 200 кПа$ — интенсивность нагрузки в центре пластины (рис. 4). Материал – сталь ($E = 2,1 \cdot 10^8 кПа$; $\mu = 0,33$).

Результаты расчетов при линейном законе изменения коэффициента постели и при изменяющемся по закону вогнутой параболы, приведены в табл. 5, 6.

Таблица 5. Прогибы и моменты в стальной пластине с шарнирным опиранием при линейном законе изменения коэффициента постели

Коорд, <i>м</i>	<i>w</i> , мм		<i>M_r</i> , кНм/м		<i>M_θ</i> , кНм/м	
	МКЭ	Авторский метод	МКЭ	Авторский метод	МКЭ	Авторский метод
	2	3	4	5	6	7
0	-0,051840	-0,051903	-0,044891	-0,045680	-0,045169	-0,045680
0,038095	-0,051886	-0,051949	-0,040827	-0,043413	-0,042791	-0,044318
0,07619	-0,052021	-0,052082	-0,032626	-0,036645	-0,037327	-0,040257
0,114286	-0,052226	-0,052286	-0,020598	-0,025229	-0,028959	-0,033429
0,152381	-0,052475	-0,052532	-0,007516	-0,008855	-0,017585	-0,023683
0,190476	-0,052724	-0,052780	0,012977	0,012811	-0,006069	-0,010841
0,228571	-0,052922	-0,052976	0,041842	0,039967	0,009647	0,005222
0,266667	-0,053001	-0,053054	0,076804	0,072515	0,030463	0,024506

Продолжение таблицы 5.

1	2	3	4	5	6	7
0,304762	-0,052880	-0,052933	0,114044	0,109908	0,053050	0,046808
0,342857	-0,052468	-0,052522	0,156111	0,151018	0,080790	0,071663
0,380952	-0,051665	-0,051719	0,201876	0,194046	0,107745	0,098291
0,419048	-0,050366	-0,050422	0,242547	0,236502	0,133652	0,125581
0,457143	-0,048471	-0,048528	0,281765	0,275259	0,161957	0,152105
0,495238	-0,045888	-0,045946	0,316828	0,306713	0,185899	0,176174
0,533333	-0,042548	-0,042604	0,329994	0,327049	0,202633	0,195943
0,571429	-0,038407	-0,038462	0,326921	0,332615	0,212410	0,209565
0,609524	-0,033467	-0,033517	0,310163	0,320393	0,213790	0,215386
0,647619	-0,027768	-0,027812	0,279721	0,288544	0,205879	0,212183
0,685714	-0,021408	-0,021443	0,229609	0,236974	0,191584	0,199409
0,72381	-0,014529	-0,014554	0,161356	0,167881	0,169847	0,177444
0,761905	-0,007322	-0,007333	0,080400	0,086216	0,140844	0,147819
0,8	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,108384	0,113384

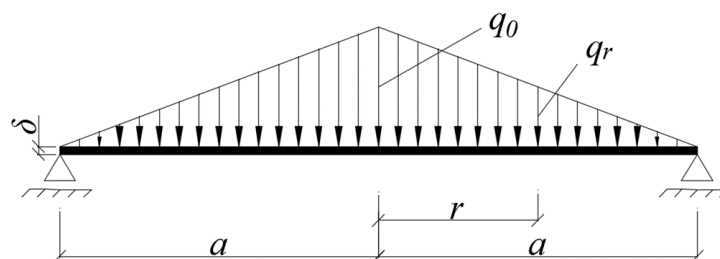


Рис. 4. Нагрузка, изменяющаяся вдоль радиуса по линейному закону

Таблица 6. Прогобы и моменты в стальной пластине с шарнирным опиранием при изменении коэффициента постели по закону вогнутой параболы

Коорд, м	w , мм		M_r , кНм/м		M_θ , кНм/м	
	Авторский метод	МКЭ	Авторский метод	МКЭ	Авторский метод	МКЭ
0	-0,043557	-0,043500	0,121648	0,117341	0,121648	0,118254
0,038095	-0,043434	-0,043378	0,115116	0,107285	0,117654	0,112219
0,07619	-0,043079	-0,043026	0,099992	0,090531	0,108112	0,101505
0,114286	-0,042529	-0,042480	0,081788	0,072830	0,096080	0,089493
0,152381	-0,041826	-0,041780	0,064578	0,057581	0,083887	0,078173
0,190476	-0,041009	-0,040967	0,051230	0,047134	0,073238	0,068982
0,228571	-0,040108	-0,040070	0,043632	0,042962	0,065327	0,062890
0,266667	-0,039139	-0,039104	0,042870	0,045812	0,060921	0,060485
0,304762	-0,038099	-0,038066	0,049347	0,055779	0,060425	0,062011
0,342857	-0,036968	-0,036936	0,062834	0,072327	0,063914	0,067385
0,380952	-0,035709	-0,035677	0,082472	0,094281	0,071142	0,076200
0,419048	-0,034267	-0,034236	0,106742	0,119794	0,081530	0,087718
0,457143	-0,032581	-0,032550	0,133435	0,146339	0,094162	0,100860
0,495238	-0,030582	-0,030550	0,159678	0,170771	0,107786	0,114231
0,533333	-0,028204	-0,028172	0,182032	0,189484	0,120854	0,126183
0,571429	-0,025392	-0,025360	0,196730	0,198736	0,131609	0,134932
0,609524	-0,022113	-0,022083	0,200062	0,195101	0,138241	0,138750
0,647619	-0,018364	-0,018338	0,188927	0,176091	0,139108	0,136214
0,685714	-0,014181	-0,014160	0,161527	0,140906	0,133026	0,126522
0,72381	-0,009642	-0,009626	0,118164	0,091235	0,119603	0,109838
0,761905	-0,004865	-0,004857	0,062046	0,032023	0,099599	0,087639
0,8	3,375E-16	0,000000	-1,391E-14	0,000000	0,075249	0,075250

Пример 4. Стальная пластина при тех же исходных данных, что и в предыдущем примере, но с жестким закреплением по контуру.

Результаты расчетов при линейном законе изменения коэффициента постели и при изменяющемся по закону вогнутой параболы, приведены в табл. 7, 8.

Таблица 7. Прогибы и моменты в стальной пластине с жестким закреплением по контуру при линейном законе изменения коэффициента постели

Коорд, <i>m</i>	<i>W</i> , мм		<i>M_r</i> , кНм/м		<i>M_θ</i> , кНм/м	
	МКЭ	Авторский метод	МКЭ	Авторский метод	МКЭ	Авторский метод
0	-0,053638	-0,053693	-0,004481	-0,004709	-0,004049	-0,004709
0,038095	-0,053641	-0,053697	0,000254	-0,000338	0,002502	-0,002081
0,07619	-0,053642	-0,053698	0,012031	0,012400	0,007562	0,005603
0,114286	-0,053609	-0,053665	0,032279	0,032911	0,021262	0,018025
0,152381	-0,053492	-0,053549	0,057054	0,060468	0,039085	0,034809
0,190476	-0,053223	-0,053280	0,093105	0,094053	0,060398	0,055447
0,228571	-0,052720	-0,052779	0,132660	0,132195	0,084333	0,079220
0,266667	-0,051890	-0,051953	0,173303	0,172820	0,111722	0,105129
0,304762	-0,050636	-0,050703	0,214885	0,213144	0,137048	0,131836
0,342857	-0,048861	-0,048935	0,250527	0,249632	0,161138	0,157642
0,380952	-0,046482	-0,046563	0,278742	0,278057	0,182701	0,180497
0,419048	-0,043436	-0,043524	0,293655	0,293663	0,200421	0,198067
0,457143	-0,039696	-0,039791	0,290355	0,291459	0,208090	0,207847
0,495238	-0,035278	-0,035380	0,262347	0,266621	0,207313	0,207329
0,533333	-0,030264	-0,030368	0,214093	0,215006	0,191032	0,194226
0,571429	-0,024796	-0,024901	0,134588	0,133712	0,165785	0,166713
0,609524	-0,019101	-0,019200	0,022097	0,021658	0,120954	0,123691
0,647619	-0,013475	-0,013566	-0,121398	-0,119911	0,058977	0,065022
0,685714	-0,008297	-0,008372	-0,300028	-0,287084	-0,020521	-0,008282
0,72381	-0,004000	-0,004055	-0,478023	-0,473180	-0,108685	-0,093976
0,761905	-0,001068	-0,001097	-0,774192	-0,668987	-0,203571	-0,188623
0,8	0,000000	0,000000	-0,869413	-0,863413	-0,312804	-0,287804

Таблица 8. Прогибы и моменты в стальной пластине с жестким закреплением по контуру при изменении коэффициента постели по закону вогнутой параболы

Коорд, <i>m</i>	<i>W</i> , мм		<i>M_r</i> , кНм/м		<i>M_θ</i> , кНм/м	
	Авторский метод	МКЭ	Авторский метод	МКЭ	Авторский метод	МКЭ
0	-0,044579	-0,044528	0,130836	0,127336	0,130836	0,128078
0,038095	-0,044447	-0,044396	0,125536	0,119488	0,127582	0,123348
0,07619	-0,044060	-0,044012	0,114062	0,107524	0,120236	0,115508
0,114286	-0,043446	-0,043401	0,101772	0,096754	0,111780	0,107696
0,152381	-0,042634	-0,042592	0,092443	0,090180	0,104398	0,101706
0,190476	-0,041643	-0,041603	0,088457	0,089543	0,099559	0,098674
0,228571	-0,040481	-0,040443	0,090957	0,095415	0,098098	0,099139
0,266667	-0,039139	-0,039101	0,099974	0,107310	0,100276	0,103097
0,304762	-0,037592	-0,037553	0,114497	0,123724	0,105821	0,110020
0,342857	-0,035800	-0,035758	0,132515	0,142172	0,113949	0,118884
0,380952	-0,033718	-0,033673	0,151064	0,159256	0,123389	0,128192
0,419048	-0,031299	-0,031249	0,166301	0,170775	0,132416	0,136026
0,457143	-0,028507	-0,028452	0,173663	0,171945	0,138915	0,140134
0,495238	-0,025326	-0,025266	0,168152	0,157748	0,140495	0,138076
0,533333	-0,021777	-0,021713	0,144761	0,133444	0,134670	0,127431
0,571429	-0,017926	-0,017860	0,099059	0,095214	0,119097	0,106078
0,609524	-0,013898	-0,013833	0,027899	0,026097	0,091883	0,072505
0,647619	-0,009884	-0,009823	-0,069830	-0,069267	0,051914	0,036142
0,685714	-0,006143	-0,006091	-0,192503	-0,195094	-0,000827	-0,001362
0,72381	-0,002997	-0,002957	-0,335300	-0,341126	-0,065013	-0,073960
0,761905	-0,000816	-0,000795	-0,490155	-0,496905	-0,137895	-0,146239
0,8	7,19E-17	0,0000	-0,646322	-0,656312	-0,215441	-0,213641

На рис. 5 показана зависимость прогиба от координаты для стальной пластины, шарнирно закрепленной по контуру и опирающейся на основание, коэффициент постели которого изменяется по закону вогнутой параболы, а на рис. 6 – для такой же плиты, но жестко защемленной по контуру.

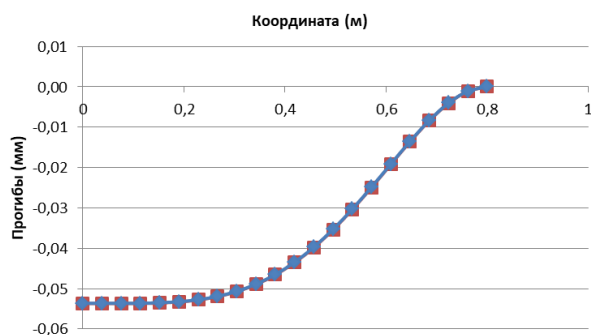


Рис. 5. Зависимость прогиба от координаты при линейном коэффициенте постели

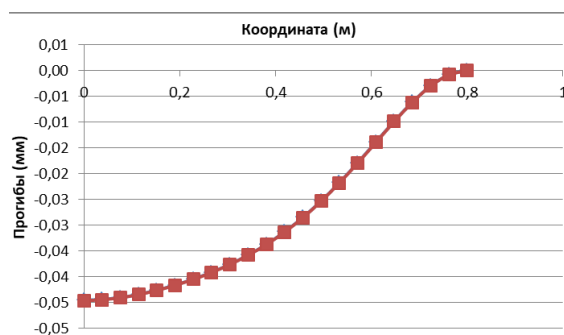


Рис. 6. Зависимость прогиба от координаты при коэффициенте постели, который изменяется по закону вогнутой параболы

Выводы. Таким образом, представлены восемь вариантов расчета напряженно-деформированного состояния сплошной круглой пластины на переменном упругом основании – по четыре для бетонной круглой плиты и для стальной круглой пластины – при двух условиях закрепления (шарнирном и жестком по всему контуру) и двух законах изменения коэффициента постели (по линейному закону и по закону вогнутой параболы). Для решения поставленной задачи применен разработанный авторами общий аналитический метода решения дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами. Для верификации результатов используется метод конечных элементов. Сравнение показывает, что результаты очень хорошо совпадают по прогибам, отличаясь в третьей-четвертой цифре после запятой, и несколько хуже – по моментам.

ЛИТЕРАТУРА

1. Wang Y. H., Tham L. G., Cheung Y. K. Beams and plates on elastic foundations: A review // Progress in Structural Engineering and Materials. 2005. Vol. 7(4). P. 174–182.
2. Расчет сооружений на деформируемом основании / С. Н. Клепиков. – Киев: Научно-исследовательский институт строительных конструкций, 1996. – 203 с.
3. Ишкова А.Г., Изгиб круглой пластинки на упругом полупространстве под действием сосредоточенной силы и продольных сил, Изв. вузов. Матем., 1962, № 3, 37–47.
4. Александров В.М. Асимптотическое решение задачи о цилиндрическом изгибе пластинки конечной ширины на упругом полупространстве / В. М. Александров, М. Д. Солодовник // Прикладная механика. – 1974. – Т. 10, вып. 7. – С. 77-87.
5. Александров В.М., Саламатова В.Ю. Изгиб круглой мембраны на линейно-деформируемом основании // ПММ. 2011. Т. 75. Вып. 4. С. 672-677.
6. Босаков С. В. К решению контактной задачи для круглой пластинки / С. В. Босаков // Прикладная математика и механика. – 2008. – Т. 72, № 1. – С. 99-102.
7. Босаков С.В. К Решению неосесимметричной контактной задачи для круглой пластинки / Вестник Брестского государственного технического университета. 2014. №1 (85). С. 83-87.
8. Грибов А.П., Куканов Н.И. Решение задачи изгиба пластины на упругом основании методом граничных интегральных уравнений // Вестник УлГТУ. Ульяновск. 2001, № 3. С. 60-71.
9. Jesus Adjalma Costa, C.A. Brebbia The boundary element method applied to plates on elastic foundations / Engineering Analysis Volume 2, Issue 4, December 1985, Pages 174-183.
10. Ng, S. F. and Chan, M. Y. Solution of Some Boundary Value Problems in Applied Mechanics by Collocation Least Square Method, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 11, Pp. 137-150 (1977).
11. Крутий Ю. С. Розробка методу розв'язання задач стійкості і коливань деформівних систем зі змінними неперервними параметрами: дис. докт. техн. наук: 01.02.04 / Ю. С. Крутий. – Одеса, 1916. – 272 с.
12. Investigation of the Free Vibrations of Bar Elements with Variable Parameters Using the Direct Integration Method / Shvab'yuk, V.I., Krutii, Y.S., Surianinov M. // Strength of Materials Volume 48, Issue 3, 1 May 2016, Pp. 384-393.
13. Аналітичний розв'язок диференціального рівняння осесимметричного згину круглої пластини на змінній пружній основі / Крутий Ю. С., Сур'янінов М.Г., Карнаухова Г.С. // XIX International Conference "Dynamical system modelling and stability investigation", Modeling & Stability, Proceedings of conference reports. Kiyv, may 22-24, 2019. Pp.98-99.
14. Analysis of forced longitudinal vibrations of columns taking into account internal resistance in resonance zones / Krutii, Y., Kovrov, A., Otrosh, Y., Surianinov, M. 2020. Materials Science Forum 1006 MSF, Pp. 79-86.