PHYSICS AND MATHEMATICS

О РЕШЕНИИ СПЕЦИАЛЬНЫХ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ В МАТЕМАТИЧЕСКИХ ОПЕРАЦИЯХ

Гурбанов Фахраддин Фарзалы оглу,

Шамахинский лицей Азербайджанской Республики с уклоном Технических, Гуманитарных и Естественных предметов.

DOI: https://doi.org/10.31435/rsglobal_sr/31012019/6337

ARTICLE INFO

Received 20 November 2018
Accepted 27 January 2019
Published 31 January 2019

KEYWORDS

differential equation, mathematical operations, quadratic equation,had a solution, homogeneous.

ABSTRACT

By citing equation (5) (or (6)) to the particular case, using the lemmas from [4], one can find any number of solutions.
Thus proved the following theorem:
Theorem: In mathematical operations there is any number of solutions to equation (5) (or (6)).

Citation: Гурбанов Фахраддин Фарзалы оглу. (2019) O Reshenii Special'nyh Harakteristicheskih Uravnenij v Matematicheskih Operaciyah. *Science Review.* 1(18). doi: 10.31435/rsglobal_sr/31012019/6337

Введение.

Уравнение в виде

$$L(y) = y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_n y = 0 \qquad (1)$$

называется однородным обыкновенным дифференциальным уравнением с постоянным коэффициентом. Здесь, $a_1,\ a_2, \dots, a_n \in R$ есть вещественные числа. В (1) заменим $y = e^{kx}$ (здесь, k - есть параметр). Получив соответствующие производные, учитывая в (1) и упрощая, получим:

$$L(y) = (k^n + a_1 k^{n-1} + \cdots + a_n)e^{kx}$$

Если обозначить так:

$$k^n + a_1 k^{n-1} + \cdots + a_n = f(x) \qquad (2)$$

получится

$$L(y) = f(k)e^{kx} \qquad (3)$$

Для того чтобы функция $y = e^{kx}$ была решением однородного дифференциального уравнения (1) необходимо и достаточно, чтобы число

k был корнем характеристического уравнения :

$$f(x) = k^n + a_1 k^{n-1} + \cdots + a_n = 0 \qquad (4)$$

Уравнение (4) называется характеристическим уравнением уравнения (1).

В источниках [1], [2], [3] фундаментальные решения уравнения (1) построится по корням уравнение (4).

При n =2, 3, 4 формулы решения уравнение (4) известны - решения в радикалах (при помощи сложений, умножений и извлечений из-под знака корня).

Но если $n \geq 5$, решения уравнение (4) не решается в радикалах по теореме Абеля.

Естественно, возникает такой вопрос: «что делать?»

Постановка задачи. *Анализировать уравнение (4) или (1) в математических операциях.*

Решение задачи:

Покажем существование любого числа в частных решениях уравнения (1) (или (4)) при n = 2.

Рассмотрим уравнений:

$$y'' + py' + qy = 0 \tag{5}$$

$$f(k) = k^2 + pk + q = 0 \tag{6}$$

Для уравнения (5) рассмотрим следующие случаи:

Первый случай: при *p<0, q<0*, используя леммы из [4], уравнение (5) напишем в таком виде:

$$\left.\begin{array}{c} \dot{y}'' \cdot (1 \cdot t)^2 exp\left\{-2 \int \left|(lnt)' + \frac{1}{2}(ln1)'\right| dx\right\} - py' - qy = 0 \\ t > \frac{c}{\sqrt{1}} = c > 0 \end{array}\right\} \tag{7}$$

здесь, $c > 0$ есть произвольная постоянная интегрирования.

Из (7) выбираем *t* так, чтобы выполнялось соотношение:

$$t^2 exp\{-2 \int |(lnt)'| dx\} - p - q = 0 \tag{8}$$

[Выполнение отношения (8) означает, что такие функции как

$$y_1 = e^x \quad \text{və} \quad y_2 = y_1 \int \frac{e^{px}}{y_1^2} dx = e^x \int \frac{e^{px}}{e^{2x}} dx = e^x \int e^{(p-2)x} dx =$$

$$= \frac{1}{p-2} e^x e^{(p-2)x} = \frac{1}{p-2} e^{(p-1)x}$$

являются решениями уравнения (5) с точностью постоянным множителем.

Тогда $k_1 = 1$, $k_2 = p - 1$ будут корнями уравнения (6)].

Теперь решаем уравнение (8):

$$exp\left[2 \int |(lnt)'| dx\right] = \frac{t^2}{p+q}$$

$$exp \int |(lnt)'| dx = \frac{t}{\sqrt{p+q}}$$

Обе стороны последнего уравнения прологарифмируем с натуральным основанием и получим производное первого порядка:

$$|(lnt)'| = (ln\frac{t}{\sqrt{p+q}})' \tag{9}$$

Чтобы это уравнение имело решение:

$$\left(l\,n\frac{t}{\sqrt{p+q}}\right)' > 0 \Rightarrow ln\frac{t}{\sqrt{p+q}} > c_1' \Rightarrow t > e^{c_1'}\sqrt{p+q} = c_1\sqrt{p+q} \tag{10}$$

Решим уравнение (9):

$$(lnt)' = -\left(ln\frac{t}{\sqrt{p+q}}\right)' \Rightarrow (lnt)' + \left(ln\frac{t}{\sqrt{p+q}}\right)' = 0 \Rightarrow ln\frac{t^2}{\sqrt{p+q}} = c_2' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{t^2}{\sqrt{p+q}} = e^{c_2'} = c_2^2 \Rightarrow t = c_2\sqrt[4]{(p+q)} \tag{11}$$

Чтобы уравнение (5) имело решение в пределах условий (7), (10) и (11) должно выполняться неравенство

$$c > c_2\sqrt[4]{p+q} > \sqrt{p+q} \cdot c_1$$

$c_1 = \frac{1}{\sqrt{p+q}}$, $c_2 \geq \frac{1}{\sqrt[4]{p+q}}$ и если c - выбираем достаточно большим, то будет $x \in (1; +\infty)$.

Значит, при $x \in (1; +\infty)$ функции $y_1 = e^x$ и $y_2 = e^{(p-1)x}$ являются фундаментальными решениями уравнения (5). А числа
k_1=1, $k_2 = 1$-p решениями уравнения (6).

Второй случай: При $p > 0$; $q > 0$; $x \in (1; +\infty)$ функции
$y_1 = e^{-x}$ и $y_2 = e^{(1-p)x}$ есть решениями уравнение (5), а числа
$k_1 = -1$ və $k_2 = 1 - p$ решениями уравнения (6).

Третий случай: При $p < 0$; $q > 0$; $x \in (1; +\infty)$ функции
$y_1 = e^x$ и $y_2 = e^{(p-1)x}$ решения есть уравнения (5), а числа
$k_1 = 1$ и $k_2 = p - 1$ есть решения уравнения (6).

Четвертый случай: При $p > 0$; $q < 0$; $x \in (1; +\infty)$ функции
$y_1 = e^x$ и $y_2 = e^{-(p+1)x}$ являются решениями уравнения (5),
а числа $k_1 = 1$ и $k_2 = -(p+1)$ есть решения уравнения (6).

Чтобы показать правильность вышесказанных надо учитывать значений функций и соответствующих производных в уравнении (5).

Отметим что, решения квадратного уравнение (6) найденных в радикалах совпадает с решениями, найденных в математических операциях. Однако, обратное этой задачи может быть и неверной. Например, в уравнении $k^2 + px + q = 0$, пусть $D = p^2 - 4q = 0$. Значение $q = \frac{p^2}{4}$ учитываем в уравнении (6):

$$k^2 + px + \frac{p^2}{4} = 0.$$

Решение этого уравнения будет

$$k_{1;2} = \mp\frac{p}{2} \quad .$$

Теперь рассмотрим дифференциальное уравнение подобному уравнения (6)

$$y'' \pm py' + qy = 0.$$

При $q = \frac{p^2}{4}$ получим:

$$y'' \pm py' + \frac{p^2}{4}y = 0$$

Решив это уравнение в радикалах получим: $y_1 = e^{\mp\frac{p}{2}x}$, $y_2 = xe^{\mp\frac{p}{2}x}$.

В математических операциях:

1) При $p > 0$, $\frac{p^2}{4} > 0$, $x \in (1; +\infty)$, $y_1 = e^{-x}$, $y_2 = e^{(1-p)x}$.

2) При $p < 0$, $\frac{p^2}{4} > 0$, $x \in (1; +\infty)$, $y_1 = e^x$, $y_2 = e^{(p-1)x}$.

Отсюда следует что решения, найденных в математических операциях, охватывает более широкий класс, чем решений, найденных в радикалах.

Замечание: Приведя уравнение (5) (или (6)) к частному случаю используя леммы из [4] можно найти любое число решений.

Таким образом доказали следующую теорему:

Теорема. В математических операциях есть любое число решений уравнения (5) (или (6)).

Следствие. В математических операциях существует любое число решений квадратного уравнения.

Резюме. Доказано существование любое число решений квадратного уравнения в математических операциях

Выражаю благодарность Заслуженному учителю Азербайджанской Республики Балакишиеву К. Б. за ценные советы при написании статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. М. Матвеев. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. Москва. 1963.
2. Q. Əhmədov, K. Həsənov, M. Yaqubov. Adi diferensial tənliklər. Bakı. 1978.
3. M. Ə. Əzimov, F. H. Səlimov, Ş. F. Məmmədov. Diferensial tənliklər. Bakı. 1991.
4. F. F. Qurbanov, C. N. Qafarov. Rikkati tənliyinin həllərinin quruluşu haqqında bəzi qeydlər. H. Əliyev adına AAHM. Elmi əsərlər. XIX buraxılış. Səh.63-71. 2009.